9/10/18

Συνέχεια παραδειγμάτων ...

Παράδειγμα ② Έστω (πάλι) $U \subset \mathbb{R}^3$ το Αμφ.3 και έστω ότι υπάρχει ένα «ρεύμα» αέρα στο Αμφ3. Τότε ορίζεται η απεικόνιση:

$$U \ni (x,y,z) \mapsto \bar{V}(x,y,z) = \begin{pmatrix} V_1(x,y,z) \\ V_2(x,y,z) \\ V_3(x,y,z) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

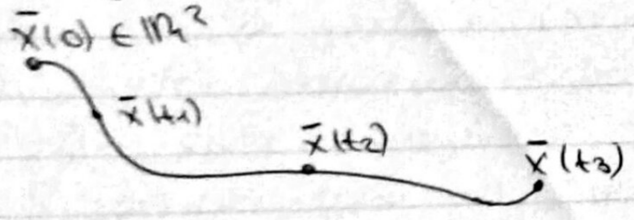
η οποία δίνει σε κάθε σημείο $(x,y,z) \in U$ του αμφιθεάτρου την ταχύτητα του αέρα $\bar{V}(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ στο σημείο αυτό. (Η ταχύτητα, ως γνωστόν, είναι ένα διάνυσμα)

Η $\bar{F} : U \to \mathbb{R}^3$, $U \subset \mathbb{R}^3$, είναι μια διανυσματική συνάρτηση του τύπου $\bar{F}: U \to \mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R}^n$, και επειδή (εδώ) το $n = m \ (=3)$ είναι ένα διανυσματικό πεδίο

Παρατήρηση Οι συναρτήσεις $V_i : U \to \mathbb{R}$, $i = 1,2,3$, $(x,y,z) \mapsto V_i(x,y,z) \in \mathbb{R}$, είναι πραγματικές συναρτήσεις (τριών πραγματικών μεταβλητών $x,y,z \in \mathbb{R}$) και ονομάζονται και βαθμωτές (Scalar) συναρτήσεις. Όπως θα δούμε, η μελέτη της $\bar{F}: U \to \mathbb{R}^3$, $\bar{F}(x,y,z) = \bar{V}(x,y,z)$ (*) ανάγεται στη μελέτη των V_i, $i = 1,2,3$, των συνιστωσών συναρτήσεων της $\bar{F} = \bar{V} : U \to \mathbb{R}^3$

(*) $\bar{F}(x,y,z) = \bar{V}(x,y,z) = \begin{pmatrix} V_1(x,y,z) \\ V_2(x,y,z) \\ V_3(x,y,z) \end{pmatrix}$

Παράδειγμα ③: Έστω, ένα σωματίδιο που κινείται στον χώρο $\mathbb{R}^n$, δηλ. σε κάθε χρονική στιγμή $t \in \mathbb{R}$ βρίσκεται σε κάποιο σημείο $\bar{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)) \in \mathbb{R}^n$. Τότε η απεικόνιση $t \mapsto \bar{x}(t) \in \mathbb{R}^n$, αν είναι συνεχής, ονομάζεται παραμετρική καμπύλη.



Η $\bar{f} : t \mapsto \bar{f}(t) \in \mathbb{R}^n$ είναι μια διανυσματική $t \in \mathbb{R}$ συνάρτηση μιας πραγματικής μεταβλητής ($t \in \mathbb{R}$) ανεξάρτητης.

Παράδειγμα ④

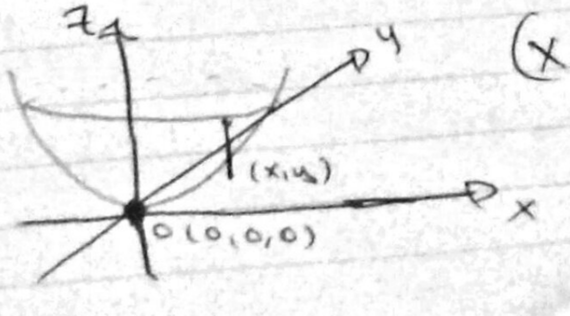
Μια απεικόνιση $\mathbb{R}^2 \supset U \ni (u,v) \mapsto \bar{\Phi}(u,v) = \begin{pmatrix} \Phi_1(u,v) \\ \Phi_2(u,v) \\ \Phi_3(u,v) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

Υπενθύμιση: $A \subset B$: A υποσύνολο του B (όχι απαραίτητα γνήσιο)
$A \subsetneq B$: A : γνήσιο υποσύνολο του B

(αν είναι συνεχώς διαφορίσιμη και το $U \in \mathbb{R}^2$ μη κενό και ανοικτό) ονομάζεται επιφάνεια στον $\mathbb{R}^3$ και μάλιστα παραμετρική

(π.χ.) η $\mathbb{R}^2 \ni (x,y) \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ g(x,y) \end{pmatrix}$ με $g(x,y) = x^2+y^2$ (βλ. παρ ④) είναι το ελλειπτικό παραβολοειδές του παρ. ①

$(x, y, g(x,y)) \in \Gamma_g(\mathbb{R}^2)$

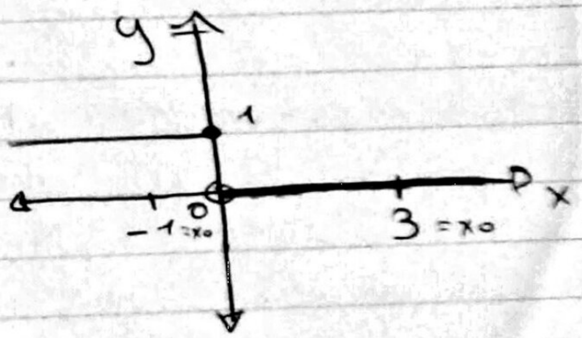


Ερώτηση: Τι πρέπει να κάνουμε για να μελετήσουμε τέτοιες συναρτήσεις (περισσοτέρων ή και εξαρτημένων πραγματικών μεταβλητών);

Απάντηση: καταρχάς, να «χαρτογραφήσουμε» τον χώρο $\mathbb{R}^n$, όπου βρίσκονται αυτές οι «περισσότερες μεταβλητές», δηλ. π.χ. να εισάγουμε ένα σύστημα συντεταγμένων. Έπειτα, να εισάγουμε ένα είδος απόστασης, για να ξέρουμε αν δύο σημεία είναι «κοντά» ή «μακριά».

Κεφάλαιο ①: "Ο Ευκλείδειος Χώρος $\mathbb{R}^n$"

Υπενθύμιση



$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Έστω:
$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}$$

Η f είναι συνεχής στο $x_0 \in \mathbb{R}$, αν και μόνο αν $\forall (x_\nu) \subset \mathbb{R}$ και $x_\nu \xrightarrow[\nu \to +\infty]{} x_0$ ισχύει $f(x_\nu) \to f(x_0)$

(ακολουθιακός ορισμός της συνέχειας)

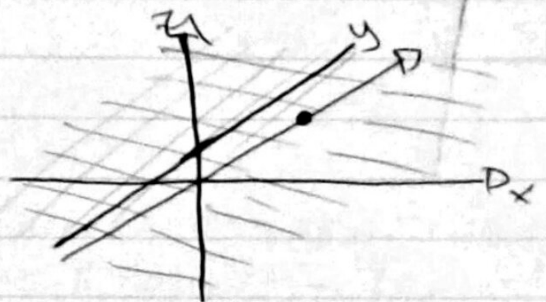
Εδώ, $\forall x_0 \neq 0$ η f είναι συνεχής στο x_0, αφού αν $x_0 < 0$ για κάθε $x_\nu \to x_0$ ($\exists \nu_0 \in \mathbb{N}$ $\forall \nu \geq \nu_0$: $x_\nu < 0$)
$\Rightarrow \forall \nu \geq \nu_0$: $f(x_\nu) = 1 \xrightarrow[\nu \to +\infty]{} 1$

Αντίστοιχα, για $x_0 > 0$

Αλλά, για $x_0=0$ και $x_\nu=\frac{1}{\nu}\to 0$ έχουμε $f(x_\nu)=0$ (αφού $x_\nu=\frac{1}{\nu}>0$) και άρα $f(x_\nu)\xrightarrow[\nu\to+\infty]{} 0\neq 1=f(0)$

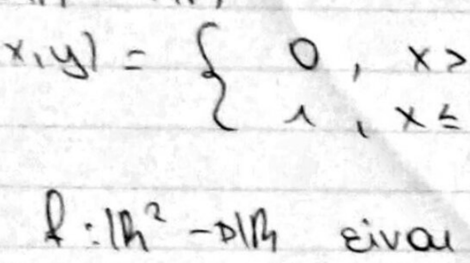
$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$

$f(x,y)=\begin{cases}0, & x>0\\ 1, & x\leq 0\end{cases}$



Η $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ αν και μόνο αν, $\forall\,(x_\nu,y_\nu)\in\mathbb{R}^2$ και $\boxed{(x_\nu,y_\nu)\to(x_0,y_0)}$: $\underbrace{f(x_\nu,y_\nu)}_{\in\mathbb{R}}\xrightarrow[\nu\to+\infty]{}\underbrace{f(x_0,y_0)}_{\in\mathbb{R}}$

! . Τι σημαίνει αυτό? Η ακολουθία (x_ν,y_ν) συγκλίνει στο (x_0,y_0) δηλ. οι όροι της «πλησιάζουν όλο και πιο πολύ το (x_0,y_0)».



Σχηματικά βλέπω με ποιους τρόπους μια ακολ. (x_ν,y_ν) πλησιάζει το σημείο (x_0,y_0) κι επειδή είμαστε στον $\mathbb{R}^2$ <u>δεν</u> μας αφορά με ποιο τρόπο η ακολουθία πλησιάζει το σημείο

Το $(x_\nu,y_\nu)\to(x_0,y_0)$ σημαίνει ότι η απόσταση $\underbrace{d((x_\nu,y_\nu),(x_0,y_0))}_{}:=\|(x_\nu,y_\nu)-(x_0,y_0)\|\xrightarrow[\nu\to+\infty]{}0\in\mathbb{R}$

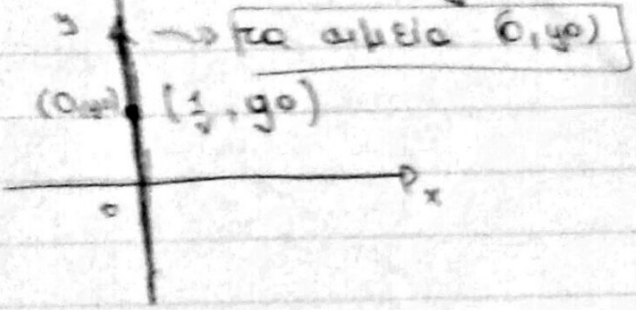
απόσταση των 2 σημείων, όπου:

και $d((x_\nu,y_\nu),(x_0,y_0))\in\mathbb{R}$ | $\|\bar{x}\|:=\|\underbrace{(\underset{\in\mathbb{R}}{x_1},\dots,\underset{\in\mathbb{R}}{x_n})}_{\in\mathbb{R}^n}\|:=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{1/2}$

η Ευκλείδεια νόρμα στον $\mathbb{R}^n$

$\to$

Στο παράδειγμα εδώ, διαπιστώνουμε ότι η f είναι ασυνεχής $\forall\ (0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ αφού για $(x_\nu,y_\nu) = \left(\frac{1}{\nu}, y_0\right)$



έχουμε $f(x_\nu,y_\nu) = 0 \xrightarrow[\nu \to +\infty]{}$

$0 \neq f(0,y_0) = 1$

και $(x_\nu,y_\nu) \to (0,y_0)$ αφού

$$\|\underbrace{(x_\nu,y_\nu)}_{\frac{1}{\nu} \quad y_0} - (0,y_0)\| = \left\|\left(\frac{1}{\nu}, 0\right)\right\| = \sqrt{\left(\frac{1}{\nu}\right)^2 + 0^2} =$$

$$= \frac{1}{\nu} \xrightarrow[\nu \to +\infty]{} 0$$

• "<u>Αλγεβρική δομή του $\mathbb{R}^n$</u>"

<u>Ορισμός</u> Ο Ευκλείδειος χώρος $\mathbb{R}^n$ είναι ο <u>διανυσματικός</u> (ή <u>γραμμικός</u>) <u>χώρος διάστασης $n \in \mathbb{N}$</u> (πάνω από το σώμα των πραγματικών $\mathbb{R}$) ο οποίος έχει ως στοιχεία τα <u>διανύσματα</u> $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ με <u>συντεταγμένες</u> $x_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$ ως προς τη <u>συνήθη βάση</u> $\vec{e_1} := (1, 0, \dots, 0), \dots, \vec{e_n} := (0, \dots, 1)$ και είναι εφοδιασμένος με τις πράξεις της • $\boxed{\text{πρόσθεσης}}$

$\bar{x} + \bar{y} = (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) =$
$= (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$

• και του $\boxed{\text{βαθμωτού πολλαπλασιασμού}}$ όπου για $a \in \mathbb{R}$ έχουμε: $a\bar{x} = a \cdot (x_1, \dots, x_n) = (ax_1, \dots, ax_n)$

$\longrightarrow$

→ Ισχύουν για τις πράξεις αυτές οι ακόλουθες ιδιότητ

$\boxed{1^{\underline{o}}\text{s πρός την πρόσθεση}}$

- $\bar{x} + (\bar{y} + \bar{z}) = (\bar{x} + \bar{y}) + \bar{z}$ (προσεταιριστικότητα)
- $\bar{x} + \bar{y} = \bar{y} + \bar{x}$ (αντι)-μεταθετικότητα)
- $\exists\, \bar{0} := (0, \ldots, 0) : \forall \bar{x} \in \mathbb{R}^n : \bar{0} + \bar{x} = \bar{x}$ (Ύπαρξη ουδετέρου στοιχείου)
- $\forall\, \bar{x} = (x_1, \ldots, x_n)\ \exists\ -\bar{x} := (-x_1, \ldots, -x_n)$: $\bar{x} + (-\bar{x}) = \bar{x} - \bar{x} = \bar{0}$ (Ύπαρξη αντιθέτου στοιχείου

$\boxed{1^{\underline{o}}\text{s προς τον πολ/σμο}}$

- $1\bar{x} = \bar{x}$ (μοναδιαίο στοιχείο)
- $a(b\bar{x}) = (ab)\bar{x}$ (συμβαίνει με πολ/μο στο $\mathbb{R}$)
- $a(\bar{x} + \bar{y}) = a\bar{x} + a\bar{y}$ (επιμεριστική ιδιότητα)
- $(a + b)\bar{x} = a\bar{x} + b\bar{x}$ //

οι οποίες ιδιότητες αποδεικνύονται (ΑΣΚΗΣΗ) με χρήση των ορισμών και των ιδιοτήτων του $\mathbb{R}$ (και των πράξεων)

→ Στον διανυσματικό χώρο (πάνω από το $\mathbb{R}$) $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ εισάγουμε το (κανονικό) <u>εσωτερικό γινόμενο</u> (Ευκλείδειο)

$$\bar{x} \cdot \bar{y} := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

το οποίο εσωτ. γιν έχει τις εξής ιδιότητες :

$\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\bar{y} = (y_1, \ldots, y_n)$

→

→ Ιδιότητες εσωτ. γινομένου

- $\bar{x}\cdot\bar{y} = \bar{y}\cdot\bar{x}$

- $(a\bar{x} + b\bar{y})\bar{z} = (\bar{x}\cdot\bar{z})a + b(\bar{y}\cdot z)$

- $\left.\begin{array}{l}\bar{x}\cdot\bar{x} \geq 0 \quad \forall \bar{x} \in \mathbb{R}^n \text{ και } \bar{x}\cdot\bar{x} = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = \sum_{i=1}^{n} x_i^2\end{array}\right\} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad \bar{x} = \bar{0} = (0, \ldots, 0) \Rightarrow x_i = 0 \quad \forall\, i = 1, \ldots, n$

(οι οποίες πάλι αποδεικνύονται με χρήση του ορισμού και των ιδιοτήτων του $\mathbb{R}$)

→ Ο $\mathbb{R}^n$ είναι διανυσματικός χώρος (πάνω από το $\mathbb{R}$) με εσωτερικό γινόμενο

→ Λόγω της ιδιότητας του θετικά ορισμένου του ~~...~~ εσωτ. γινομένου ($\bar{x}\cdot\bar{x} \geq 0 \ \forall \bar{x}$, $\bar{x}\cdot\bar{x} = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{0}$)

μπορεί να ορισθεί η λεγόμενη του διανύσματος $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$: $\|\bar{x}\| = \|(x_1, \ldots, x_n)\| := \sqrt{\bar{x}\cdot\bar{x}} \geq 0$
$(x_1, \ldots, x_n)$ δηλ. μιας απεικόνισης:
$\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με τις ιδιότητες:

- $\|\bar{x}\| \geq 0 \quad \forall \bar{x} \in \mathbb{R}^n$, $\|\bar{x}\| = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{0}$

- $(a \in \mathbb{R})$ $\|a\bar{x}\| = |a| \cdot \|\bar{x}\|$

- $\boxed{\|\bar{x} + \bar{y}\| \leq \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|}$ (Τριγωνική ανισότητα)

→

• Εκτός από την τριγωνική ανισότητα όλες οι άλλες αποδεικνύονται με χρήση του ορισμού, και των ιδιοτήτων των πραγματικών $\mathbb{R}$ (ΑΣΚΗΣΗ)

Υπόδειξη: Η τριγωνική ανισότητα αποδεικνύεται με χρήση της ανισότητας Cauchy-Schwarz

$$|\underbrace{\bar{x}\cdot\bar{y}}_{\in\mathbb{R}}| \leq \|\bar{x}\|\cdot\|\bar{y}\| \quad \forall\, \bar{x},\bar{y} \in \mathbb{R}^n$$